Title	(1,1,・・・・・,1)型有限Able群ノsubgroupノ相互関係（Ｉ）
Author(s)	木下，佳壽
Citation	全国紙上数学談話会. 2(1) p.6-p.12
Issue Date	1946-11-03
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75137
rights	
Note	

2. (1, 1, …, 1)型有限Abel群ノsubgroupノ相互関係(I)

(阪大) 木下佳壽

(9月27日受付)

必要ガアツテ有限Abel群ノsubgroup及ソノ相互ノ関係ニツイテ考ヘタノデ之ヲ書キマス。

ココデハAbel群ノorderガ p^n デ(1, 1, …, 1)型ノ場合ヲ記シマス。コレハ一般ノ型ノ場合ノ基礎トナリマス。コノトキorder p^{n-1},　　　ノ数ハ

$$\frac{\prod_{i=0}^{n-2}(p^n-p^i)}{\prod_{i=0}^{n-2}(p^{n-1}-p^i)}=p^{n-2}+p^{n-2}+\cdots\cdots+R+1$$

デスガ之ヲ始ノAbel群 $\mathfrak{G}$ ノBaseデ書ケバ次ノ様ニナル。

~~除~~($\mathfrak{G}$)ノ一組ノBase $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ ヲ取リ之ヲ基ニシテ考ヘル時 $b_1^{x_1}b_2^{x_2}\cdots b_n^{x_n}$ $(x_i\not\equiv 0\ (p))$ デ生成サレル巡回群ヲSpeltenvektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ デ表ハシ互ニ独立ナ二組ノBase

$(b_1^{x_1^{(1)}}, b_2^{x_2^{(1)}}, \cdots b_n^{x_n^{(1)}})$ 及 $(b_1^{x_1^{(2)}}, b_2^{x_2^{(2)}}, \cdots b_n^{x_n^{(2)}})$ デ生成サレルAbel群ヲ $\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} \end{bmatrix}$ デ表ハシ以下同様ニ $\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(i)} \\ x_2^{(1)} & x^{(2)} & \cdots & x_2^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(i)} \end{bmatrix}$ ヲ定義スル。コノ (n, i) 型ノ行列ニツキ次ノ性質ヲ假定スル。

(A) p ヲmodulusトスル有理整数ノElementヲモツ i 次ノ行列デdeterminant $\not\equiv 0\ (p)$ ノモノヲ右乗ジテモコノ行列ハ変ラナイ。

特別ノ場合トシテ

(イ) 同一列ノElement全部ニmod p デ0トincongruentナ有理整数ノカケテモ行列ハ変ラナイ。

(ロ) オ l 列ニ $k(\not\equiv 0)$ ヲ掛ケテオ m 列ニ加ヘテモ行列ハ変ラナイ。

(ハ) オ l 列トオ m 列トヲ交換シテモ行列ハ不変。

之等ノ性質ヲ假定スルノハ determinant ≢ 0 (p) ナル i 次ノ行列ヲ右乗スレバ (n, i) 型ノ行列デ表ハサレルAbel群ノAutomorphismヲ與ヘルノダカラ當然デアル。

(B). (n, i) 型ノ行列デハ $n \geqq i$, $\mathrm{rank} = i$. 之ハ p^n 次ノ Abel群デ i 個ノ独立ナ Element ヲトツテ Base トシタノダカラ當然デアル。

コノ(A), (B)ノ假定ノ下ニ p^{n-1} 次ノ互ニ相異ル subgroup (即 (n, i) 型ノ行列ノ中(A)ノ意味デ異ルモノ)ヲ見出ス。

Satz 1. p^{n-1} 次ノ subgroup ハ次ノ $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ ノ何レカノ形ノ行列デ表ハサレル group デアリ之等ノ $p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1$ 個ノ行列(デ表ハサレル群)ハ互ニ(A)ノ意味デ相異ル。即 E_i ヲ i 次ノ単位行列トスル時

$$\left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{l} \lambda_j \text{ ハ } \bmod p \text{ ノ有理}\cancel{\text{整数}} \\ \text{悉クハ } 0 \text{ ナラズトス} \end{array}\right) \text{ ノ形ノ } p^i \text{ 個ノ}$$

行列ヲ e_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ トスル。

特ニ

$$\left(e_0 = \begin{bmatrix} 0, 0 \cdots\cdots 0 \\ E_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad e_{n-1} = \begin{bmatrix} E_{n-1} \\ \hline \lambda_1, \lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

之ヲ証スルノニ二ツノ階段ニ分ケル。即 p^{n-1} 次ノ部分群ノ行列ヲ G_{n-1} トカク時

(1) G_{n-1} ハ $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ ノ何レカノ形デアリ, 逆ニ, $e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}$ ノ形ノ行列ハ G_{n-1} ノ一ツノ行列デアル

(2) e_i ノ形ノ行列ノ間ニハ同ジモノナク e_i ト e_k $(i \neq k)$ ノ形ノ行列ノ間ニモ同ジモノナシ。同ジトハ(A)ノ意味ニ於テ。

(証) (1)ノ証。逆ノ方ハスベテノ λ_j ガ 0 − congruent ナコトヨリイ(行列ノ rank ガ $n-1$ トナル)ヨリ明示ス。G_{n-1} デ(以下 mod p ヲ書ク事ヲ省略) $x_1^{(i)}$ ノ

[illegible]ノ≢0ナモノ[illegible]トナイ時トニ分ケテ考フ。

(a) スベテノ $x_1^{(j)}$≢0ノトキ: G_{n-1}デ才一行ハ皆≡0デG_{n-1}ノrangハ$n-1$ ((B))ダカラ$x_2^{(j)}$ ($j=1,\cdots,n-1$) ノ中≢0 ナモノガアル。コノ内 jノ最小ヲ kトシテ $y_2^{(k)}x_2^{(k)}\equiv 1$ ナル $y_2^{(k)}$ヲトリ 才k列ガ$y_2^{(k)}x_l^{(k)}$ ($l=2,\cdots,n$) ナル行列ヲ考ヘレバ (A) ノ (イ) ニヨリ

$$G_{n-1}=\begin{array}{c} \text{才}k\text{列} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & y_2^{(k)}x_3^{(k)} & \cdots & * & * \\ & \cdots & & y_2^{(k)}x_4^{(k)} & \cdots & & \\ * & & & \vdots & & & * \\ & & & y_2^{(k)}x_n^{(k)} & & & \end{array}\right]\end{array}$$

*ノ部分ハ mod pノアル rational integerヲ示ス

次ニ才K列ニ $-x_2^{(k+1)}, -x_2^{(k+2)},\cdots\cdots,-x_2^{(n-1)}$ヲ乗ジテ順次才K+1列，才K+2列，$\cdots$，才$n-1$列ニ加ヘテ[(A)ノ(ロ)]後才一列ト才K列ヲ交換シテ[(A)ノ(ハ)]

$$G_{n-1}=\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \bar{x}_3^{(1)} & \bar{x}_3^{(2)} & \cdots & \bar{x}_3^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & & \\ \bar{x}_n^{(1)} & \bar{x}_n^{(2)} & \cdots\cdots & \bar{x}_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

次ニrangガ$n-1$ダカラ才3行ニ才一列以外デ≢0ナモノガアル。之ヲ$\bar{x}_3^{(l)}$トス(lハ此ノ如キ番号ノ最小ノヲトル。$l\neq 1$) $y_3^{(l)}\bar{x}_3^{(l)}\equiv 1$ナル$y_3^{(l)}$ヲトリ 才$l$列ヲ$y_3^{(l)}$倍シテ得タ行列デ，才$l$列ニ$-\bar{x}_3^{(1)}, -\bar{x}_3^{(l+1)}, -\bar{x}_3^{(l+2)},\cdots,-\bar{x}_3^{(n-1)}$ヲ乗ジテ才一列，才$l+1$列，$\cdots$，才$(n-1)$列ニ加ヘ才2列ト才$l$列ト交換シテ

$$G_{n-1}=\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ * & * & & \cdots & * \\ & & * & & \end{array}\right]$$

*ハ上述ト同ジ

行列G_{n-1}ノrangガ$n-1$ダカラ才3行以下ノ各行デ必ズ上記如キ≢0ナElementガアル(才i行デハ $x_i^{(m)}$≢0 $m\geq i$ [illegible]テ、コノ手順ガ才4行以下ニ繰返サ

シテ逆ニ

$$G_{n-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ & & E_{n-1} & \end{bmatrix}$$

トナル。

(b) アル $x_1^{(j)}\neq 0$ ノトキ コノ j ノ中デ最小ノ番號 k ヲトリ $y_1^{(k)}x_1^{(k)}=1$ ナル $y_1^{(k)}$ ヲトリ第 k 列ヲ $y_1^{(k)}$ 倍シ [(A), (イ)] 後第 k 列ノ $-x_1^{(k)}$ 倍, $-x_1^{(k+1)}$ 倍, ……, $-x_1^{(n-1)}$ 倍ヲ第 $k+1$ 列, 第 $k+2$ 列 …… 第 $(n-1)$ 列ニ加ヘ [(A), (ロ)] 後第1列ト第 k 列ヲ交換 ((A), (ハ)) スレバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \cdots & x_2^{(n-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \cdots & x_n^{(n-1)}\end{bmatrix}$$ 第2行以下ノElementハ更新ニ x トシタ

(b1) 次ニ第2列以下ノelementノスベテガ第2行デ $\neq 0$ ナル時ハ rang ガ $n-1$ ノ多メ第3行ヲ除ク第2列以下ノElementノ中 $\neq 0$ ナルモノガアリ之ニツイテ(a)ト同様ノ手順ヲ施セバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x_2^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & * & \cdots & *\\ & & * & & \end{bmatrix}$$

rang $=n-1$ ナル故ニコノ時第3行以下ハ全テ0デナケレバナラナイ。$x_2^{(m)}\neq 0$, 而シテ -1 セル x_i ガ他ノ各行ヲ消スト同様ノ手順ヲ施セバ

$$G_{n+1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & E_{n-2} & & \end{bmatrix}\in \mathfrak{l}_1$$

(b2) 第2列以下ノelementノ中第2行デ $\neq 0$ ナルモノガアレバ(a)ノ場合ト同様ノ手順ニヨリ

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} & \cdots & x_3^{(n-1)} \\ & & & & \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & x_n^{(3)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

コノ時第3行ニツキ第3列以下デ非0ナモノヲ捜ス。モシ第3列以下デスベテノ element ≡ 0ナラバ (b1) ト

$$G_{n-1} = \left[\begin{array}{c|c} E_2 & 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ 0 & E_{n-3} \end{array}\right] \in l_2$$

モシ第3列以下デ非0ナモノガアレバ(a1)ト同様ノ手順デ

$$G_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ & & * & & \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} *ノ意 \\ 味ハ前 \\ ト同ジ \end{pmatrix}$$

第4行以下デ同様ノ手順ヲ行フ。第k行デ第k列以下（即列ノ番号 > k ナル列）ニ非0ナルモノガ存在スルコトガコノ手順デ $k=1,\ldots,h$ マデ起リ第$h+1$行デ始メテ第$h+1$列以下ニ非0ナルモノガナイ時ハ第$h+1$行ヲ(b1)ノ手順デ行ヘバ以下ノ行デ(a)ノ手順ノミガ起ルコトガ rang. $n-1$ナルコトヨリ分ル。従ッテコノ場合ハ

$$G_{n-1} = \left[\begin{array}{c|c} E_h & 0 \\ \hline \lambda_1 \cdots \lambda_h & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-h} \end{array}\right] \in l_h$$

デアル。即以上デ G_{n-1} ハ $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ ノ何レカノ形デアルコトガ分ル。

(2) l_i ハ $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ ノ各ニ p ヲ modulus トスル p 個ノ値ヲ代入スルコトニヨリ p^i 個ノ行列ヲ含ムガ之等ハ互ニ相異ル group ヲ表ハス。今

$$\begin{bmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ \mu_1 \cdots \mu_i & \\ 0 & E_{n-1-i} \end{bmatrix}$$ ハ（λ, μ 何レモ mod p）

ナリトスレバ(A)ヨリ p ヲ法トスル有理整数 a ヲ element トスル determinant $\not\equiv 0$ ノ行列 (a_{ik}) ガ存在シテ

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1\,n-1} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \mu_1 \cdots \mu_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix}$$

デアル。サテ

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots \lambda_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1\,n-1} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1\,n-1} \\ & \\ a_{i1} & a_{i\,n-1} \\ b_1 & b_{n-1} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,n-1} \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix}$$

コヽニ $b_l = \sum_{k=1}^{i} a_{kl}\lambda_k$

$(l = 1, 2, \cdots, n-1)$

従テ $a_{lm} \equiv \begin{cases} 1 & (l = m) \\ 0 & (l \neq m) \end{cases} \quad (l, m = 1, 2, \cdots, n-1)$

$\therefore \quad b_l \equiv \begin{cases} 0 & (l \geqq i+1) \\ \lambda_l & (l < i+1) \end{cases}$

即之ヨリ上ノ行列ノ右辺ヲ比較シテ $\lambda_l = \mu_l$ $(l \leqq i+1)$

次ニ e_i ト e_k $(i \neq k)$ ノ間ニ同ジモノガアレバ $i > k$ トスル時（一般性ヲ失ハズ）

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ \lambda_1 \cdots e_i & 0 \\ 0 & E_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1\,n-1} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ \mu_1 \cdots \mu_k & 0 \\ 0 & E_{n-1-k} \end{pmatrix}$$

即之ヨリ次ノ式ヲ得ル

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{第}\,i+1\,\text{列} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & & a_{1\,n-1} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & & a_{i\,n-1} \\
b_1 & \cdots & b_i \cdots & b_{n-1} \\
a_{i+1\,1} & \cdots & & a_{i+1\,n-1} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{n-1\,1} & \cdots & & a_{n-1\,n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \text{第}\,i+1\,\text{列} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & \ddots & 0 & & 0 & \\
0 & \ddots & 1 & & & \\
\mu_1 & \cdots & \mu_k & & 0 & \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & \ddots & \\
\cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \text{第}\,i\,\text{列}
\end{array}
\begin{array}{l} \}\,k\text{行} \\ \\ \\ \\ n-1-k\;\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

両辺デ第$(i+1,\ i)$ elementヲ比較シテ

$$b_i = 1$$

一方デ

$$b_i = \sum_{k=1}^{i} a_{ki}\lambda_k \equiv 0 \qquad (\because\ \text{トヨリ}\ a_{ki} \equiv 0,\ k \leqq i)$$

之ハ矛盾デアル。

(Satz 1 証終)

今一般ニ$(1, 1, \cdots, 1)$型ノp^x次ノAbel群デp^{x-r}次ノ部
分群ノ行列ノ形ガ分ッタトシテ之等ノ行列ヲ一括シ
テ$_{x,\ x-r}\ell$トカケバp^n次ノ$(1, 1, \cdots, 1)$型ノAbel群デp^{n-r}次
ノ部分群ハ次ノSatz 2ニヨリ行列ノ形ガ分ル

Satz 2 ; p^n次ノ$(1, 1, \cdots, 1)$型Abel群デp^{n-r+1}次ノ
部分群ノ形ガ(任意ノ與ヘラレタnニツイテ)既ニ分
ッタトスレバp^{n-r}次ノ部分群ノ形ハ次ノ何レカノ形
ニナル。

$$\left[\begin{array}{c:c}
{}_{n-1-k,\ n-r-k}\ell & 0 \\ \hdashline
\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-r-k} & 0 \\ \hdashline
0 & E_k
\end{array}\right]$$

$(k = 0, 1, \cdots, n-r)$
λハmod pノ有理整数
$_{x,x}\ell = E_x$トス

($k=0$ノトキE_kノ行ハ消失シ$k=n-r$ノ時
ℓノ行ハ消失スルモノトスル)

部分群ノ作ルlatticeノdiagramヲ考ヘルノニハ
$r=1$ノ時(Satz 1ノ時)ヲ考ヘテツギタセバヨイ。従
テ今、p^{n-1}次ノ部分群トp^{n-2}次ノ部分群トノ間ノ包
含関係ヲ調ベルノニSatz 1ヲ利用スル。(以下次回)